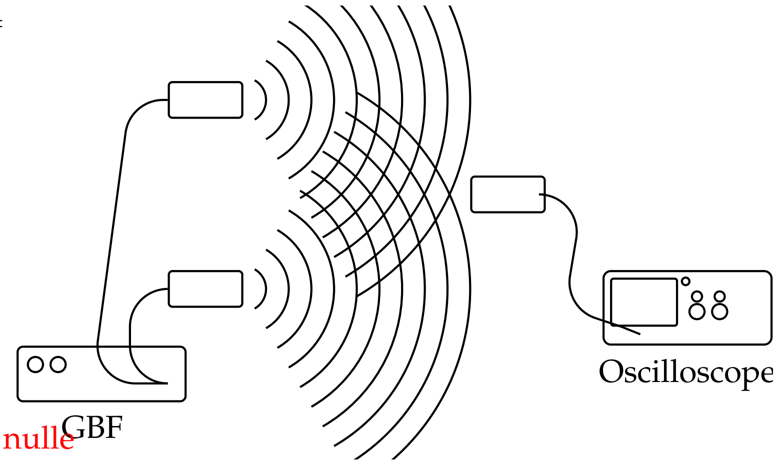
On_2 : Superposition d'ondes

PCSI 2022 – 2023

I Interférence : mise en évidence expérimentale

1. Dispositif expérimental

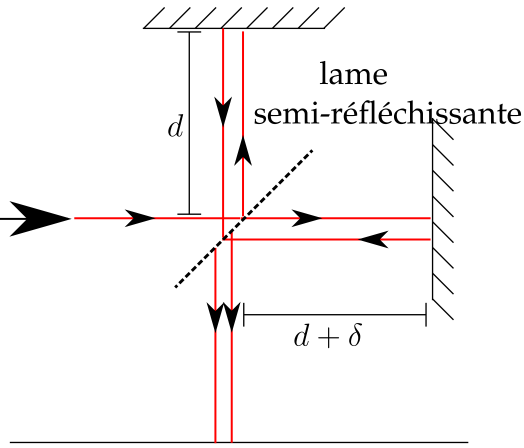
On dispose deux émetteurs ultrasons ($f = 40$ kHz) que l'on va brancher sur le même générateur et d'un récepteur qu'on va brancher sur l'oscilloscope.



Avec un seul des émetteurs, on déplace le récepteur dans la pièce : On doit observer que l'amplitude varie peu, diminue un peu quand on s'éloigne et quand on n'est pas en face mais c'est tout

Avec les deux émetteurs,
on observe des zones où l'amplitudes est nulle

Deuxième expérience avec de la lumière : on envoie de la lumière sur une lame semi-réfléchissante, puis les miroirs renvoient la lumière vers un écran.

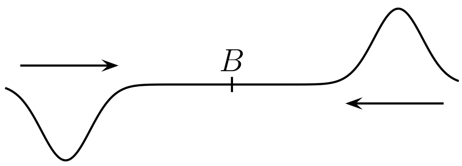


Lorsque l'on cache l'un des deux miroirs l'écran est éclairé de façon uniforme.
Lorsqu'aucun des miroirs n'est caché, On voit apparaitre des cercles lumineux et des cercles sombres.

Dans ces deux expériences, on observe que l'intensité à un endroit donné n'est pas simplement la somme des intensités. C'est ce phénomène que l'on appelle interférence entre des ondes.

2. Interprétation qualitative

Lorsqu'il y a deux ondes avec la même forme qui se propagent, il peut y avoir un endroit où la perturbation n'est pas ressentie car les deux contributions se compensent à chaque instant. Par exemple le point B sur le schéma ci-contre.



simulation python
En mettant deux émetteurs qui émettent un signal de même forme, on observe des zones qui oscillent et d'autres zones qui au contraire n'oscille pas du tout.

3. Calculs

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que l'on pouvait exprimer une onde progressive sous la forme $s_1(t) = S_0 \cos(kx - \omega t)$. La propagation n'est plus simplement unidimensionnel et il faut maintenant remplacer x par la distance à la source que l'on notera r.

Si l'on dispose de deux sources de même fréquence, en phase, et de même amplitude, alors en un point M le signal reçu est :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = S_0 \cos(kr_1 - \omega t) + S_0 \cos(kr_2 - \omega t)$$

En utilisant les formules de trigonométrie :

$$s(t) = 2S_0 \cos\left(k\frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t\right) \cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2} - 0\right)$$

On voit donc apparaitre un facteur $\cos\left(k\frac{r_1-r_2}{2}\right)$ qui module l'amplitude de la somme. Ce facteur est maximum en valeur absolu lorsque

$$k\frac{r_1 - r_2}{2} = n\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1 - r_2}{2} = n\pi \Leftrightarrow r_1 - r_2 = n\lambda \quad (n \in \mathbb{Z})$$

On parle d'interférences constructives (addition des signaux) À l'inverse, ce facteur est nul lorsque

$$k\frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow r_1 - r_2 = n\lambda + \lambda/2 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

On parle alors d'interférences destructives.
On voit que la distance aux sources n'intervient que parle terme $r_1 - r_2$, on définit l'ordre d'interférence p tel que $\boxed{p = \frac{r_1-r_2}{\lambda}.}$

Définition : On parle d'interférences constructives lorsque l'ordre d'interférence p est un nombre entier. Dans ce cas, les amplitudes des signaux incidents s'ajoutent. On parle d'interférences destructives lorsque l'ordre d'interférence p est un nombre demi-entier. Dans ce cas les amplitudes des signaux incidents se compensent.

Remarques :

- Les signaux initiaux n'ont pas nécessairement la même amplitude, en particulier, il aurait fallut prendre en compte le fait que l'énergie est répartie dans un milieu de plus en plus grand et qu'elle doit donc décroitre. Dans le cas où les signaux ne sont pas de même amplitude, le signal ne se compensent pas complètement : on a perte de contraste. (cf 2e année PC)
- L'ordre d'interférence prend une forme moins simple lorsque le milieu n'est pas homogène, en effet le vecteur d'onde k n'est alors pas le même en tout point de l'espace et il faut en tenir compte. (cf 2e année PC)

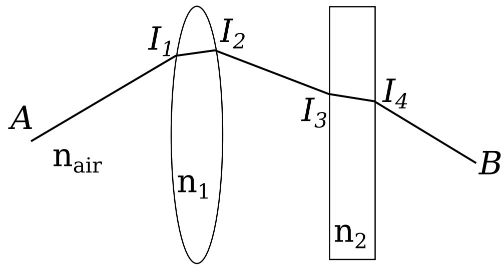
4. Cas particulier de l'optique

Dans le cas de l'optique, on a l'habitude de travailler avec les longueurs d'onde dans le vide alors que l'on a parfois des changements d'indices (passage à travers des lentilles par exemple). Or, ce qui est caractéristique d'une couleur et qui se conserve au passage d'un dioptre, c'est la fréquence et non la longueur d'onde. On en déduit que $\boxed{\lambda_n = \lambda_0/n}$, où λ_n est la longueur d'onde dans le milieu d'indice n et λ_0 celle dans le vide.
Pour pouvoir continuer à travailler avec $(r_1 - r_2)/\lambda$ on définit le chemin optique :

Définition : Le chemin optique depuis A vers B, noté (AB) , est la somme des distances parcourues multipliées par l'indice du milieu dans lequel elles sont parcourues.

$$(AB) = (AI_1) + (I_1I_2) + \cdots + (I_kB) = AI_1 \times n_1 + I_1I_2 \times n_2 + \cdots + I_kB \times n_{k+1}$$

La différence de marche notée δ entre deux ondes (même point de départ et d'arrivée) est alors la différence entre les chemins optique via les deux chemins suivis par les ondes : $\delta_{1/2} = (AB)_1 - (AB)_2$.



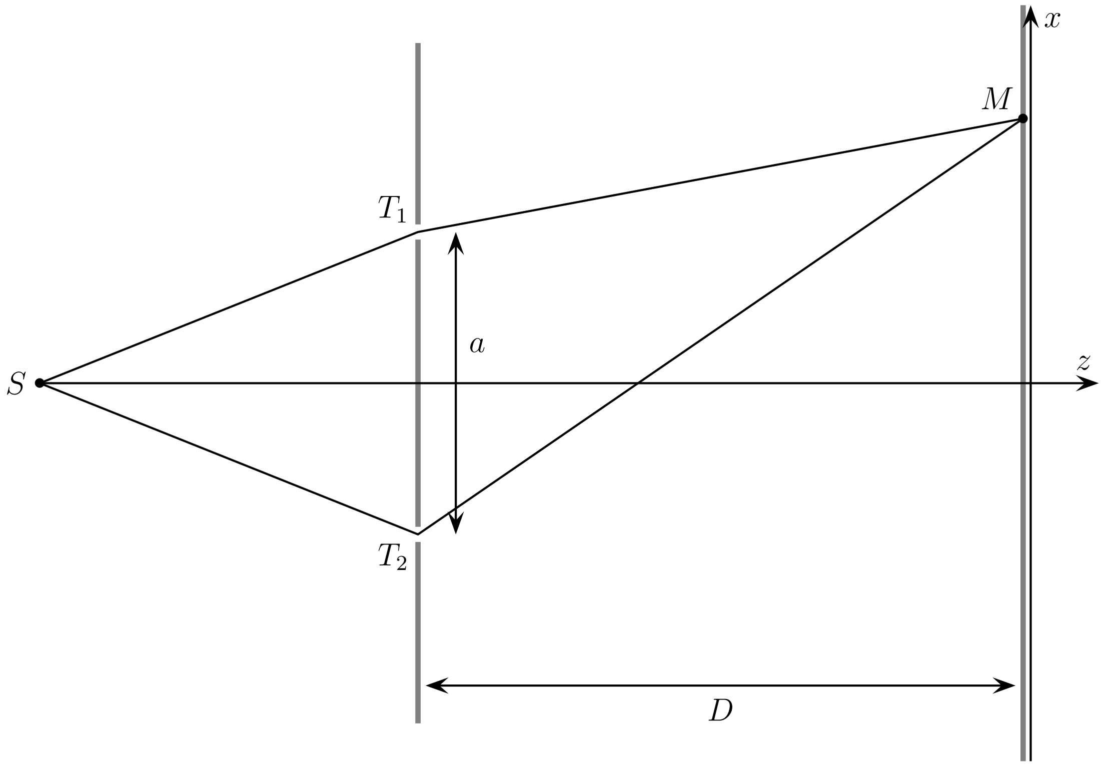
Lors d'interférence entre deux ondes de même amplitude, on peut utiliser la formule de Fresnel pour obtenir l'intensité lumineuse résultante : $I = 2I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_0}\right)\right)$.

Résumé : Dans le tableau ci-dessous, n représente un entier relatif.

type d'interférence	$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda_0}$	$p = \frac{\delta}{\lambda_0}$	δ
constructive	$0 + 2\pi \times n$	n	$n \times \lambda_0$
destructive	$\pi + 2\pi \times n$	$n + \frac{1}{2}$	$\frac{\lambda_0}{2} + n \times \lambda_0$

5. Exemple des trous d'Young

On considère le dispositif des trous d'Young : on envoie une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 sur une plaque percée de deux trous espacés d'une distance a et on observe l'intensité lumineuse sur un écran parallèle à la plaque et espacé de celle-ci d'une distance D. Compte tenu du phénomène de diffraction, chaque trous ré-émet de la lumière dans toutes les directions. Chaque point M de l'écran reçoit donc de la lumière depuis 2 chemins, celui en passant par T_1 et T_2.



Calculer l'intensité lumineuse reçue par un point M sur l'écran de coordonnée x quelconque et en déduire l'interfrange (distance entre deux franges lumineuses). On pourra utiliser l'approximation $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$ et on supposera $D \gg x$ et $D \gg a$.

✍ $\delta = n_{air} \times (T_2M - T_1M)$.

$T_1M = \sqrt{\overline{T_1M}^2} = \sqrt{D^2 + (x-a/2)^2}$

Il faut faire apparaitre quelque chose de la forme $(1+\varepsilon)$. On factorise par D^2 :

$T_1M = D\sqrt{1+\frac{(x-a/2)^2}{D^2}} \simeq D\left(1+\frac{(x-a/2)^2}{2D^2}\right) = D + \frac{x^2-ax+a^2/4}{2D}$ et de même

$T_2M \simeq D\left(1+\frac{(x+a/2)^2}{2D^2}\right) = D + \frac{x^2+ax+a^2/4}{2D}$

D'où $\delta = n_{air} \times (T_2M - T_1M) = n_{air} \times \frac{2ax}{2D} = \frac{n_{air}ax}{D}$.

On en déduit $I = 2I_0 \times \left(1+\cos\frac{2\pi \times n_{air}ax}{\lambda_0 D}\right)$. On a donc un interfrange (distance entre deux franges brillantes) qui vaut $\frac{\lambda_0 D}{n_{air}a}$.

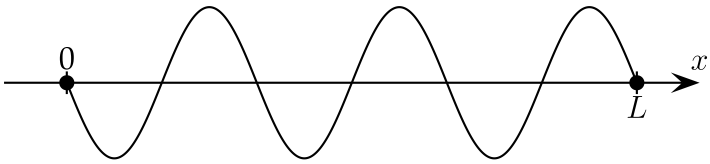
II Onde stationnaire

1. Réflexion

Dans les paragraphes précédents, nous avons supposé que l'onde se propageait dans un milieu infini, sans rencontrer d'obstacle. Dans le cas d'une onde dans une cavité , c'est-à-dire une partie de l'espace entourée de parois qui empêche la propagation de l'onde (partiellement ou complètement), un phénomène de réflexion apparait au niveau des parois. Ainsi si une onde se propage dans le sens des x croissants, elle va se réfléchir (partiellement ou complètement) contre la paroi et donner naissance à une onde se propageant dans le sens des x décroissants (et réciproquement).

2. Exemple d'une corde vibrante

Considérons le cas d'une corde fixée à ses deux extrémités que l'on repère par $x = 0$ et $x = L$ (c'est le cas par exemple dans les instruments de musique à cordes). Un opérateur génère une perturbation au milieu de la corde.



Supposons qu'une onde progressive à la pulsation ω se propage dans le sens $+\vec{e}_x$, alors celle-ci va se réfléchir en L et donner naissance à une onde progressive de même fréquence dans le sens des x décroissants.
Quelle est l'onde résultante de la superposition de ces ondes ?
$s_+ = s_{0,+} \cos(kx - \omega t)$ (on choisit l'origine des temps telle que pas de phase, ici $s = y$: l'altitude de la corde)
$s_- = s_{0,-} \cos(kx + \omega t + \varphi)$ (a priori pas la même amplitude et peut-être un déphasage, mais même fréquence car milieu linéaire)
ainsi l'onde totale est : $s = s_+ + s_- = s_{0,+} \cos(kx - \omega t) + s_{0,-} \cos(kx + \omega t + \varphi)$.

Il faut ensuite prendre en compte les conditions aux limites. Il y en a deux car la corde est attachée en deux points :

1. $\forall t, s(0,t) = 0$ et
2. $\forall t, s(L,t) = 0$

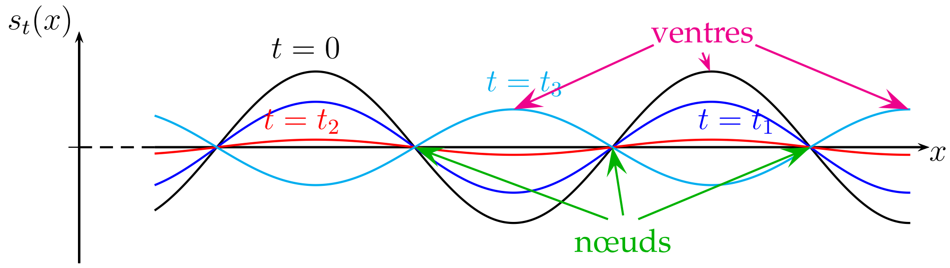
La plus simple à utiliser est la première : $\forall t; s_{0,+} \cos(k0 - \omega t) + s_{0,-} \cos(k0 + \omega t + \varphi) = 0$
d'où $s_{0,+} = -s_{0,-} = s_0$ et $\varphi = 0$

$$s = s_0 \cos(kx - \omega t) - s_0 \cos(kx + \omega t).$$

3. Onde résultante

Pour en revenir aux ondes sur la corde : $s = s_0(\cos(kx-\omega t)-\cos(kx+\omega t)) = s_0(-2)\sin\frac{2kx+0}{2}\sin\frac{0-2\omega t}{2}$

$$s(x,t) = 2s_0\sin(kx)\sin(\omega t)$$



Définition : Une onde stationnaire est une onde pour laquelle il existe des nœuds et des ventres.

Remarque : Une telle onde peut se mettre sous la forme $s(x,t) = f(x)g(t)$. La fonction $f(x)$ représente l'allure de l'onde à un instant donné et $g(t)$ représente l'amplitude relative en fonction du temps.

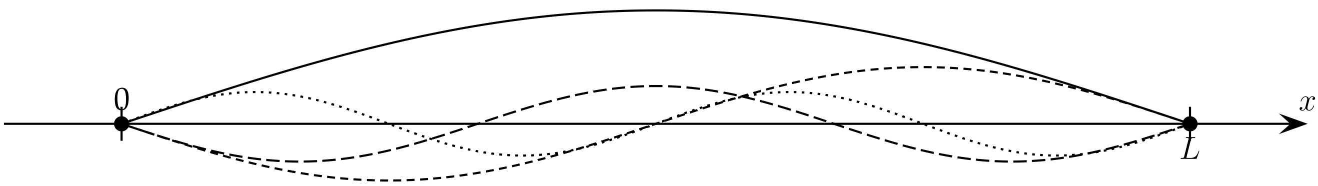
4. Quantification des modes

Il reste à prendre en compte la deuxième condition aux limites : $\forall t \quad s(L,t) = 0$ ce qui implique : $2s_0\sin(kL)\sin(\omega t) = 0$. Le terme $\sin(\omega t)$ n'est pas nul pour tout t. On a donc soit :

1. $s_0 = 0$, mais dans ce cas il n'y a ni signal ni onde,
2. soit $\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \;;\; n \in \mathbb{N}^*$ (car $k \neq 0$) $\Leftrightarrow L = n\frac{\lambda}{2}$

Cette deuxième condition implique donc que seules certaines ondes peuvent se propager. Ces ondes sont appelées modes propres de la cavité . On appelle n-ième mode le mode correspondant à l'entier n. Le premier mode est appelé le fondamental.

Théorème : Dans une cavité, seules certaines ondes appelées modes propres peuvent se propager. Ce sont les conditions aux limites qui déterminent les modes propres. On dit aussi que les modes d'une cavité sont quantifiés.



expérience de la corde de melde + stroboscopie

Exercice Trouver les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde :
✍ On a déjà vu que $L = n\frac{\lambda}{2}$ or $\lambda = c/f$ donc $f = n\frac{c}{2L}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Remarques :

♡
- Nous avons trouvés les différents modes propres qui sont les seules ondes sinusoïdales qui peuvent se propager dans la cavité. De façon générale les ondes à l'intérieur de la cavité peuvent s'exprimer comme une superposition de modes propres :

$$s(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sin k_n x \sin \omega_n t$$

- En musique, une note est liée à la fréquence fondamentale (f_1) du son correspondant. Toutefois, différents instruments jouant la même note ne produisent pas le même son. Ce point est lié aux différents harmoniques (fréquences multiple du fondamental) qui n'ont pas la même amplitude avec les différents instruments [1].
- Ici, les conditions aux limites imposaient des nœuds au niveau des extrémités de la cavité. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple dans le cas où l'une des extrémité de la corde est libre de se déplacer sans frottement, la condition aux limites imposerait une force nulle et non pas une position nulle, ce qui change les conditions de quantification.

III Somme de deux signaux de fréquences différentes

1. Avec le calcul

Les paragraphes précédents traitent de phénomènes en faisant la somme de deux signaux de même fréquence. On peut soulever deux questions (qui sont en fait liées) :

1. Que se passe-t-il lorsque les signaux n'ont pas exactement la même fréquence ?
2. Pourquoi n'observe-t-on en général pas d'interférence en optique (par exemple lorsque l'on allume les néons au plafond) ?

Considérons deux signaux de pulsations différentes ω_1 et ω_2, mais proches, c'est-à-dire que l'on va poser $\omega_1 = \omega - \delta\omega$ et $\omega_2 = \omega + \delta\omega$. Supposons pour simplifier les calculs que les signaux ont même amplitude et même phase à l'origine.

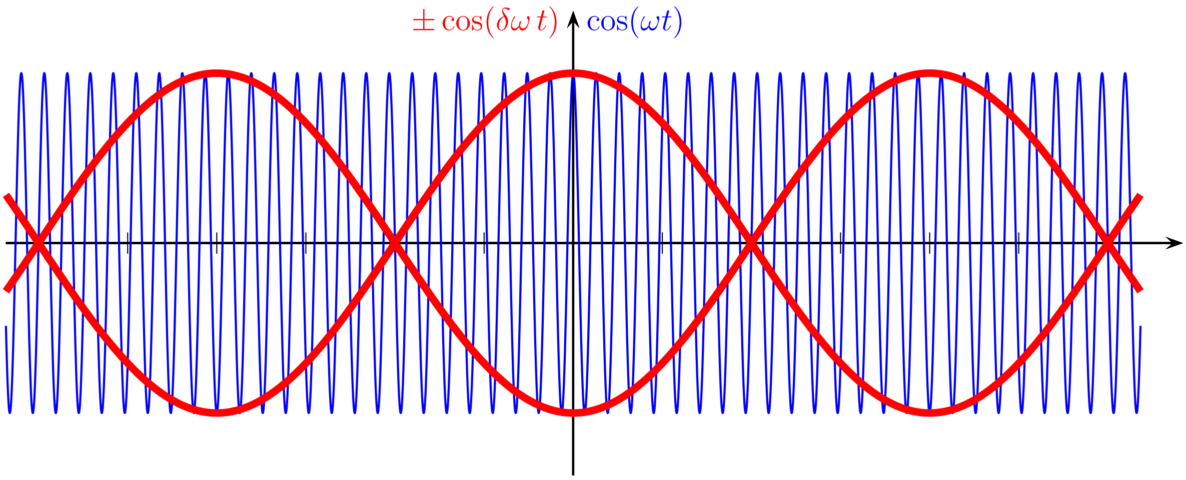
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_0\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

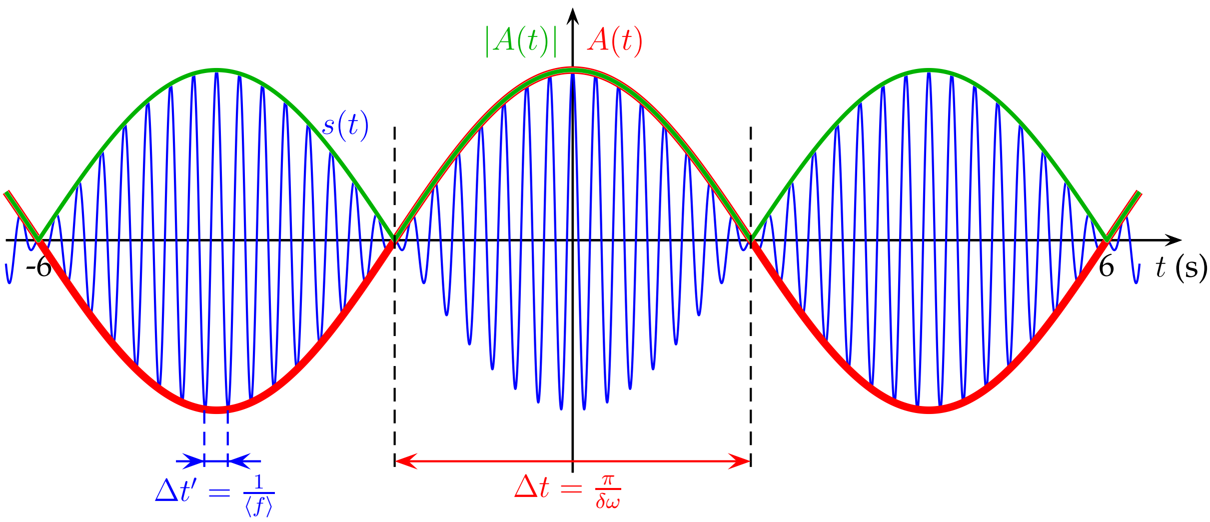
En utilisant une fois encore la formule d'addition des cosinus :

$$s(t) = 2s_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) = 2s_0\cos(\omega t)\cos(\delta\omega\, t)$$

Dans le cas où les deux fréquences sont proches, $\delta\omega \ll \omega$, c'est-à-dire $\cos(\delta\omega \times t)$ oscille très lentement par rapport à $\cos(\omega t)$. On peut donc voir la formule précédente comme étant celle d'un signal sinusoïdal dont l'amplitude varie lentement dans le temps : $A(t)\cos(\omega t)$ avec $A(t) = 2s_0\cos(\delta\omega \times t)$
Exemple :

1. Le spectre émis par un instrument est en réalité plus complexe à cause de phénomènes non linéaires et du couplage avec la caisse de résonance





Exercice : À partir de l'enregistrement de battements ci-dessus, trouver la différence de fréquence entre s_1 et s_2.

✍ On mesure l'intervalle de temps entre deux annulations : $\Delta t = 4$ s. Ce temps correspond à des annulations du cosinus, donc à une différence de phase de π. On a donc $\Delta t\delta\omega = \pi \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\pi}{\delta\omega}$. Or $\delta\omega = \frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \pi(f_2 - f_1)$ d'où

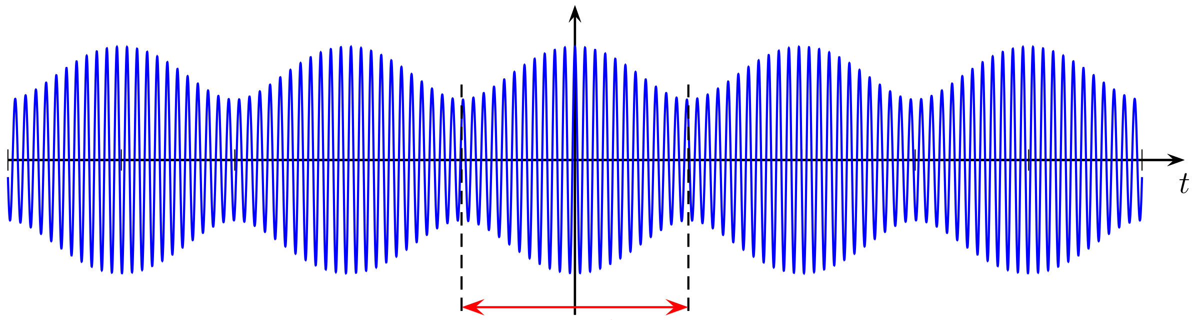
$$\Delta t = \frac{1}{f_2 - f_1} \Leftrightarrow f_2 - f_1 = \frac{1}{\Delta t}$$

(deux facteur deux qui se compensent : on mesure en fait qu'une demi-période pour les battements parce qu'on regarde la valeur absolue, et ça correspond à $\Delta f/2$)

Définition : Ce phénomène est appelé **phénomène de battements**, il apparait lorsque deux signaux **de fréquences proches** se superposent : il y a alors une **lente modulation de l'amplitude** du signal résultant. La fréquence de cette modulation est **directement lié à la différence de fréquence** entre les deux signaux.

Remarques :

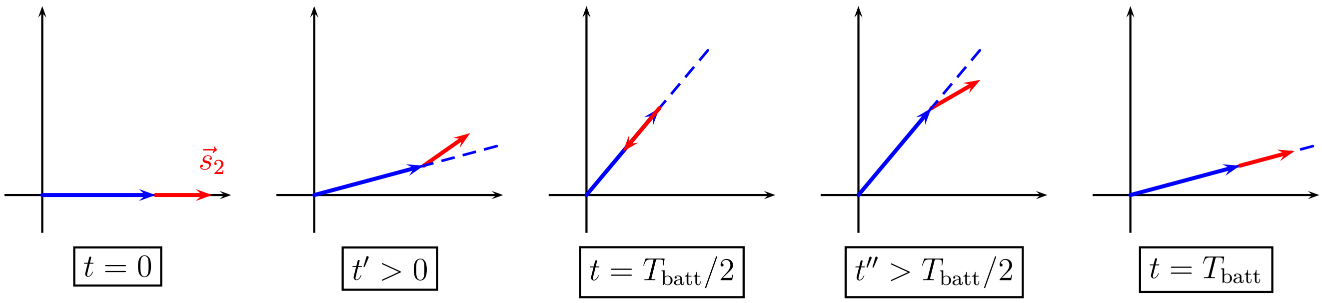
- La pseudo-fréquence du signal résultant est la moyenne des deux fréquences.
- Ce phénomène peut permettre de mesurer très précisément des fréquences lorsqu'elles sont proches car plus elles sont proches, plus la période du battement est longue donc facile à mesurer.
- Si les amplitudes sont différentes, le signal ne s'annule pas tout à fait simulation



Pour revenir aux interférences en optique, imaginons que $f_2 - f_1 \simeq \frac{f_1}{1000}$, alors la fréquence des battements sera elle aussi $\frac{f_1}{1000}$ c'est-à-dire une fréquence de l'ordre de $10^{14-3} = 10^{11}$ Hz , c'est à dire 100 milliards d'oscillations par seconde ! Le phénomène de battement est dans ce cas complètement imperceptible, le capteur effectuant une moyenne.

Ainsi, on peut rajouter comme condition pour les interférences : il faut que les fréquences des deux sources soient les mêmes, dans le cas contraire un phénomène de battement apparait.

2. Démonstration sans calcul



On considère deux signaux : s_1 de fréquence f_1, s_2 de fréquence f_2 (légèrement supérieur à f_1 dans mon exemple).
On choisit $t = 0$ à un instant où les deux signaux sont en phases.
Dans la représentation de Fresnel, s_2 tourne légèrement plus vite.

Pendant un temps t, s_1 fait $n_1(t) = f_1 t$ tours et s_2 fait $n_2(t) = f_2 t$ tours.

La première fois où les deux signaux reviennent en phase, l'amplitude redevient maximale : c'est la période des battements $t = T_{\text{batt}}$. Puisque c'est la première fois qu'ils reviennent en phase, c'est que s_2 a fait juste un tour de plus que s_1.
On en déduit :

$$n_2 = n_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad f_2 T_{\text{batt}} = f_1 T_{\text{batt}} + 1 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{batt}}(f_2 - f_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{batt}} = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

Ici on a fait l'hypothèse que $f_2 > f_1$, de façon générale : $T_{\text{batt}} = \dfrac{1}{|f_2 - f_1|}$

Table des matières

manip à monter :

1. chaine d'oscillateur ?
2. corde simple, que l'on fait vibrer à la main (Gros élastique)
3. corde vibrante + stromboscope
4. cuve à onde
5. diffraction

Expériences à monter :

1. Interférence Ultrason
2. Michelson en lame d'air
3. Battement avec deux diapason de fréq proche ?
4. HP pour audio (battement)