T_2 Éléments de statique des fluides

PCSI 2024 – 2025

I Fluides au repos

1. Définitions et propriétés

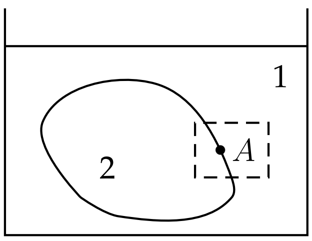
- Un fluide est un milieu continu (ses propriétés varient continument à l'échelle macroscopique) dont les particules peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres : liquide, gaz. C'est donc un corps qui peut changer de forme sous l'action d'une force même très faible.
- Un fluide est compressible et dilatable si sa masse volumique ρ est fonction de la pression et de la température : $\rho = f(p,T) \rightarrow$ équation d'état.

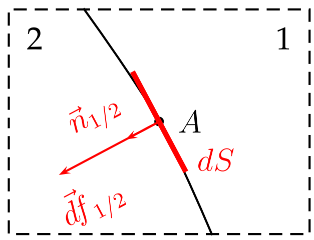
  Exemple : le gaz parfait,
  $$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT} = f(p,T)$$
  Les gaz sont compressibles et dilatables, dans les CNTP, $\rho \simeq 1$ kg.m^{-3}.
- Un fluide est incompressible si sa masse volumique ne varie pas sous l'effet d'une variation de pression. Les liquides seront considérés comme incompressibles et indilatables : $V = Cte$, pour l'eau, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}.
- Ordre de grandeur : 1 L d'eau à 1 bar dont on augmente la pression de 1 bar : variation de volume de 5.10^{-5} L . 1 L d'air à 1 bar dont augmente la pression de 1 bar : variation de volume de 0,5 L .
- Si les particules fluides (volumes définis à l'échelle mésoscopique qui contiennent assez de molécules pour avoir des propriétés locales définies) qui constituent le fluide sont au repos, on parle de statique des fluides (dynamique des fluides vue en deuxième année).

2. Pression au sein d'un fluide

À l'échelle microscopique, la pression qu'exerce un fluide sur une paroi est due aux chocs des particules du fluide sur cette dernière (Cf. T_1).

À l'échelle mésoscopique, si on considère une portion de surface dS (existant réellement ou fictive) séparant 2 parties d'un fluide,





Les chocs des particules de fluide sur la paroi se traduisent, à l'échelle mésoscopique, par une force $\vec{df}_{1/2}$: force de pression exercée par la partie 1 sur la partie 2, normale à dS si fluide parfait (sans viscosité) ou fluide réel au repos.

Force de pression : en statique des fluides,

$$\vec{df}_{1/2} = p(A)dS\vec{n}_{1/2} \qquad \text{avec } p(A) \text{ la pression du fluide au point } A.$$

Remarques :

- Les forces de pression sont donc des forces surfaciques. Par opposition, les forces de pesanteur sont des forces volumiques.
- Les forces de pressions peuvent être considérables.
  Exemple : un chimiste débutant utilise un ballon à fond plat et baisse la pression à l'intérieur du ballon à l'aide d'une trompe à eau, quelle est la résultante des forces de pression (intérieur +extérieur du ballon) sur la surface plane et quelle est la masse qui, posée sur le ballon, produirait une force de même intensité ? On donne $P_{atm} = 10^5$ Pa $\simeq 50 \times P_{int}$ et le diamètre de la surface plane : 10 cm.

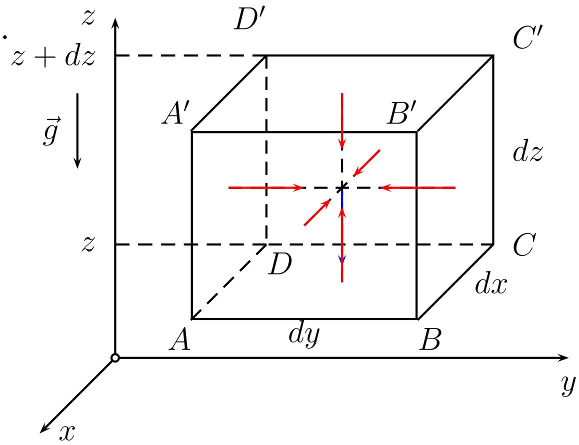
D'un coté on a $P_{atm} \times S$ car la pression est uniforme ; de l'autre $P_{atm}/50 \times S$ d'où $F = \frac{49}{50}P_{atm} \times \pi\frac{d^2}{4} =$ 770 N soit l'équivalent d'une masse de près de 80 kg posée sur une petite surface en verre !

II Relation fondamentale de la statique des fluides

Démonstration : on étudie une particule fluide de volume dV, centré en M, au repos (mésoscopique car il y a toujours l'agitation moléculaire).

Système : { particule fluide } de masse $dm = \rho dV = \rho dx.dy.dz$

Bilan des forces extérieures : (appliquées au système).



- le poids de la particule,

  $$\rho dV\vec{g} = -\rho.g.dx.dy.dz.\vec{e}_z$$

- force de pression sur la face $ABCD$:

  $$p(z)dxdy\vec{e}_z$$

- et sur $A'B'C'D'$ s'exerce

  $$-p(z+dz)dxdy\vec{e}_z$$

✍

- de même sur $AA'D'D$ et sur $BB'CC$ $p(y)dxdz\vec{e}_y - p(y+dy)dxdz\vec{e}_y$
- et enfin sur $DD'C'C$ et $AA'B'B$, $p(x)dydz\vec{e}_x - p(x+dx)dydz\vec{e}_x$

Application du théorème du centre d'inertie : à l'équilibre, la somme vectorielle des forces extérieure est nulle.
Par projection sur $\vec{e}_y$,

$$p(y)dxdz - p(y+dy)dxdz = 0 \Rightarrow p(y) = p(y+dy)$$

c'est à dire que p ne dépend pas de y.
De même, par projection sur Ox, $p(x) = p(x+dx)$ et p ne dépend pas de x non plus.
Par projection sur $\vec{e}_z$,

$$p(z)dxdy - p(z+dz)dxdy - gdxdydz = 0 \Rightarrow \frac{p(z+dz)-p(z)}{dz} = -\rho g \iff \frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow dp = -\rho g dz$$

Remarques :

- la pression du fluide en équilibre est la même en tous les points d'un même plan horizontal ($dp = 0$ pour $dz = 0$) : surfaces isobares.
- **Attention au signe** : ici $\vec{e}_z$ selon la verticale **ascendante**, si selon la verticale descendante, alors on a $dp = +\rho g dz$.
- Pour intégrer cette relation il faut connaître la fonction $\rho(p)$ et donc savoir si le fluide est compressible ou non ...

Relation fondamentale de la statique des fluides : on retiendra donc cette relation sous la forme plus générale $dp = \rho\vec{g}.d\vec{r}$

Ainsi, $\begin{cases} \text{si } \vec{g} = -g\vec{e}_z, \text{ alors } dp = \rho \times (-g\vec{e}_z)\cdot(dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = -\rho g dz \\ \text{si } \vec{g} = +g\vec{e}_z, \text{ alors } dp = \rho \times (+g\vec{e}_z)\cdot(dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = +\rho g dz \end{cases}$

III Statique des fluides incompressibles

1. Relation

On considère un fluide incompressible ($\rho = Cte$) à l'équilibre et on suppose que le champ de pesanteur est constant ($g = Cte$).
L'équation fondamentale de la statique s'écrit, si $\vec{e}_z$ vertical ascendant, $dp = -\rho g dz$ avec $\rho = Cte$.
On en déduit l'équation fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide incompressible, homogène et au repos :

$$p + \rho g z = Cte = p_0 + \rho g z_0 \Rightarrow p = p_0 - \rho g(z - z_0)$$

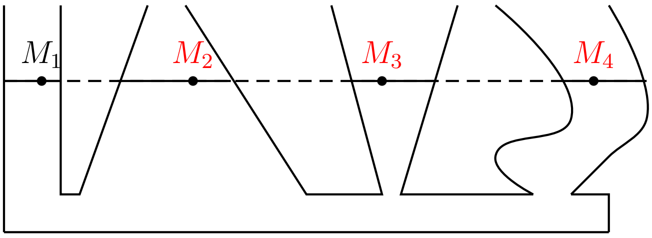
La pression du fluide dépend de l'altitude, on ne parle plus de pression d'un fluide mais de pression en un point du fluide.

Exemple : pression subie par un plongeur quand il est à 10 m sous la surface.
En $z = 0$, $p = p_0 = 1$ atm $\simeq 10^5$ Pa et en $z = -10$ m $p = p_0 - \rho g(z - 0) = 10^5 - 10^3.10.(-10) = 2.10^5$ Pa $\simeq 2$ atm.

2. Applications

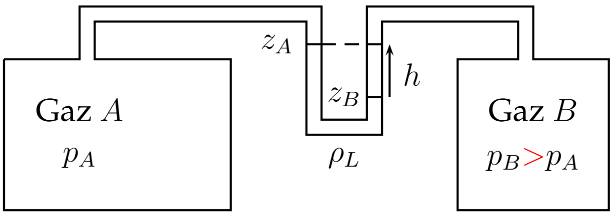
Vases communicants :

on considère par exemple 4 récipients en contact avec le même gaz à la même pression, leurs surfaces de séparation sont donc toutes à la même pression : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_{\text{atm}}$
Comme ce sont des liquides homogènes au repos, on a : $p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = p_3 + \rho g z_3 = p_4 + \rho g z_4$
et donc $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.
Les surfaces sont toutes à la même hauteur et horizontales.



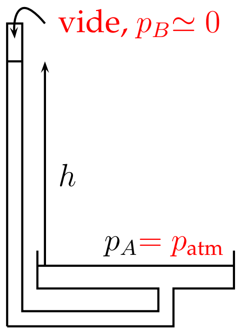
Manomètres en U : le liquide manométrique de masse volumique ρ_L est incompressible.

La dénivellation entre deux surfaces libres du liquide au repos permet de mesurer la différence de pression entre les deux surfaces.
Les fluides dans les récipients sont des gaz à la pression p_A et p_B. En tout point du liquide on a



$$p_A + \rho_L g z_A = p_B + \rho_L g z_B \Rightarrow p_A = p_B - \rho_L g h$$

Si on connaît p_B, (par exemple, $p_B = p_{\text{atm}}$ si le tube est ouvert sur l'air ambiant), on en déduit p_A.



Baromètre à mercure : $p_B + \rho g z_B = p_A + \rho g z_A$

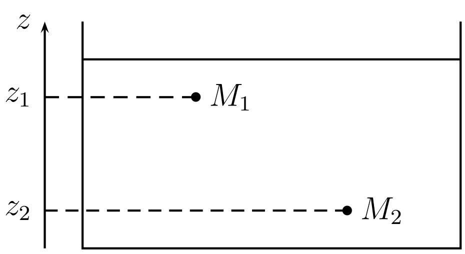
avec $p_A = p_{\text{atm}}$ et $p_B \simeq 0$ d'où

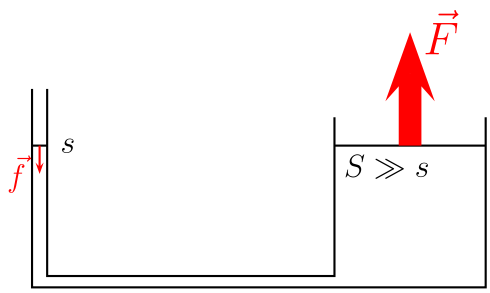
$$p_A = \rho g (z_B - z_A) = \rho g h$$

Si le liquide était de l'eau et $p_A = 1$ atm $= 101325$ Pa, on aurait $h = 10{,}3$ m !
On utilisera plutôt un liquide de masse volumique plus grande comme le mercure, on a alors $h \simeq 760$ mm de mercure ($= 760$ torr).

Théorème de Pascal : toute variation de pression au sein d'un fluide incompressible au repos se transmet intégralement à tous les points du fluide.

Démonstration : figure de gauche ci-après :





Au départ, $p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \iff p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2)$.
Par un moyen approprié on crée une variation de pression Δp en M_1, on a donc $p_1' = p_1 + \Delta p$. Que vaut p_2' ?
On a maintenant $p_1' + \rho g z_1 = p_2' + \rho g z_2 \iff p_1 + \Delta p + \rho g z_1 = p_2' + \rho g z_2$

$$p_2' = p_1 + \rho g (z_1 - z_2) + \Delta p = p_2 + \Delta p$$

On a donc en M_2 la même variation de pression qu'en M_1.

Application à la presse hydraulique : un récipient contenant un liquide (donc un fluide incompressible), souvent de l'huile, comporte deux ouvertures fermées par des pistons de surfaces très différentes $S \gg s$.
Toute force f exercée sur le petit piston produit une augmentation de pression $\Delta p = \frac{f}{s}$
Or d'après le théorème de Pascal, cette surpression est transmise à tous les points du liquide.
Le grand piston est donc alors soumis à la force $F = \Delta p S$, soit encore :

✍ $$F = \frac{fS}{s} \qquad \text{et si } S \gg s \text{ alors } F \gg f.$$

La presse hydraulique permet donc d'obtenir une force F considérablement plus importante que la force f exercée par l'opérateur.

IV Statique des fluides compressibles : cas de l'atmosphère isotherme

1. Modèle

- On étudie l'atmosphère terrestre (rayon de la Terre $R_T = 6400$ km) sur quelques kilomètres d'altitude $z \ll R_T$ donc

$$\vec{P} = -m\frac{\mathcal{G}M_T}{(R_T+z)^2}\vec{e_z} \simeq -m\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}\vec{e_z} \simeq m\vec{g}_0 \qquad \text{ne dépend pas de l'altitude}$$

- On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}
  Pour une particule fluide de volume dV et de quantité de matière dn, on a

✍ $$pdV = dnRT = \frac{dm}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{dm}{dV} = \frac{pM}{RT}$$

- On suppose que sur cette partie de l'atmosphère, la température reste constante : $T = T_0$ (hypothèse de l'atmosphère isotherme).

Remarque : en fait, la température diminue linéairement sur les dix premiers kilomètres puis varie différemment selon différentes couches.

2. Variation de p avec l'altitude

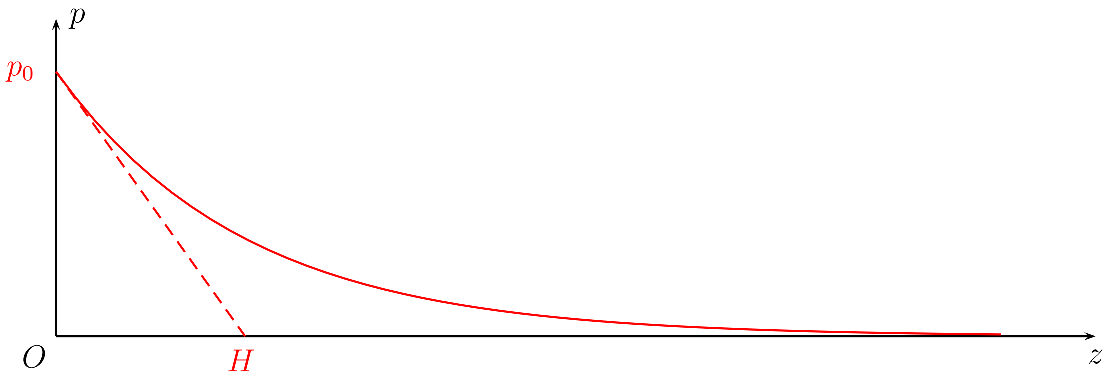
Ajout : résoudre l'équadiff par séparation des variables et méthode normale
L'équation fondamentale de la statique s'écrit alors

$$dp = -\rho g dz = -\frac{pM}{RT_0}gdz \iff \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0}dz \Rightarrow p = A.e^{\frac{-Mgz}{RT_0}}$$

✍ et en notant $p = p_0$ au niveau du sol

$$\Rightarrow p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

avec $H = \frac{RT_0}{gM}$ la hauteur caractéristique $H \simeq 8{,}6$ km pour $T_0 = 293$ K.
La pression diminue de façon exponentielle donc quand l'altitude augmente.



Exemples :

- Variation relative de pression pour un réservoir de hauteur 20 m contenant de l'air à 20°C. Pour $z_0 = 0$ on a $p_0 = 1$ atm.

$$\Delta p = p - p_0 = p_0\left[\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) - 1\right] \iff \frac{\Delta p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) - 1 = -0{,}002$$

  diminution relative de 0,2 % : imperceptible.

- Variation relative de pression entre la pression au niveau de la mer et celle au sommet du Mont Blanc (4810 m) si l'on considère que l'atmosphérique est isotherme à 20°C.

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) - 1 = -0.435$$

  diminution relative de 43,5 % : → avions de ligne pressurisés, altimètres = baromètres.

- En fait $\frac{\Delta p}{p} \leqslant 0{,}01$ si z ne varie pas de plus de 86 m.

On parlera donc de pression d'un gaz et non de pression en un point du gaz si sa hauteur est limité (100 m), ce qui est toujours le cas dans les réservoirs usuels.

Remarque : en réalité, 99 % de la masse est située sous une altitude de 31 km mais on trouve encore des particules à l'altitude de 500 à 800 km. On fixe la limite de l'atmosphère à environ 40 km.

3. Distribution de Boltzmann

On assimile l'air à un mélange de N molécules identiques de masse μ et de densité moléculaire $n^* = \frac{N}{V}$ l'énergie potentielle de chaque molécule est

$$e_p = \mu g z + e_{p0} = \mu g z \text{ si on pose } e_p(z=0) = 0$$

Pour un système de volume V et de masse m,

$$n^* = \frac{N}{V} = \frac{n\mathcal{N}_A}{V} = \frac{p\mathcal{N}_A}{RT_0} = \frac{\mathcal{N}_A p_0}{RT_0}\exp\left(-\frac{gMz}{RT_0}\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{Mgz}{RT_0} = \frac{\mathcal{N}_A \mu g z}{RT_0} = \frac{\mu g z}{k_B T_0} = \frac{e_p(z)}{k_B T_0} \quad \text{avec } k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} \text{ la constante de Boltzmann.}$$

On peut donc écrire

$$n^* = \frac{Mp_0}{\mu RT_0}\exp\left(-\frac{e_p(z)}{k_BT_0}\right) = n_0^*\exp\left(-\frac{e_p(z)}{k_BT_0}\right) \qquad \text{avec } \exp\left(-\frac{e_p(z)}{k_BT_0}\right) \text{ le facteur de Boltzmann.}$$

et $n^*(z)$ est proportionnel à la probabilité de trouver une particule donnée à l'altitude z, c'est à dire dans l'état d'énergie $e_p(z)$.
On peut généraliser le résultat précédent :

> **Distribution de Boltzmann : dans un système macroscopique à l'équilibre thermostatique à la température T_0 constitué d'un très grand nombre de particules discernables et indépendantes, la probabilité de trouver une particule du système dans l'état d'énergie e_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann**
>
> $$\exp\left(-\frac{e_i}{k_BT_0}\right)$$

Les états d'énergie les plus faibles sont plus occupés (système plus stable) mais une augmentation de la température rend tous les états possibles.

V Actions d'un fluide au repos

1. Résultante des forces de pression exercées sur une paroi

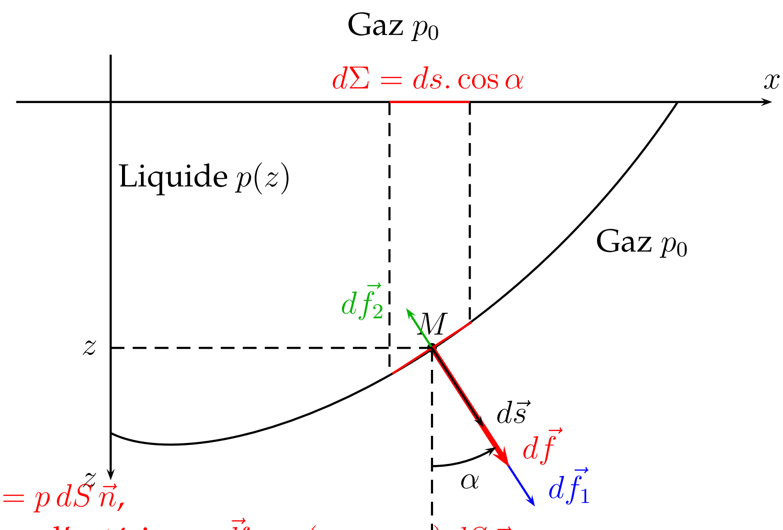
1.a. Forces pressantes sur un élément de paroi

Considérons un liquide contenu dans un récipient de forme quelconque.

Soit p_0 la pression du gaz surmontant le liquide et environnant également le récipient.

En un point M situé à la distance z de la surface libre du liquide incompressible (axe Oz orienté vers le bas), la pression est $p = p_0 + \rho gz$ avec ρ la masse volumique du liquide.

Un élément de surface dS du récipient centré en M subit :



- une force $d\vec{f}_1$ de la part du liquide : $d\vec{f}_1 = p\,dS\,\vec{n}$,
  $\vec{n}$ étant la normale au liquide orientée vers l'extérieur : $d\vec{f}_1 = (p_0 + \rho gz)\,dS\,\vec{n}$
- une force $d\vec{f}_2$ de la part du gaz environnant : $d\vec{f}_2 = -p_0 dS\vec{n}$

Au total l'élément de surface dS est soumis à une force $d\vec{f}$:

$$d\vec{f} = \rho gzdS\vec{n} \qquad : d\vec{f} \text{ est normale à } dS \text{ et est orientée vers l'extérieur.}$$

Remarque : la composante verticale de $d\vec{f}$, $df_z = \rho gzdS\cos\alpha = \rho gzd\Sigma$ représente le poids qu'aurait une colonne de liquide de hauteur z et de base $d\Sigma = dS\cos\alpha$.

1.b. Résultante des forces pressantes exercées sur une paroi plane

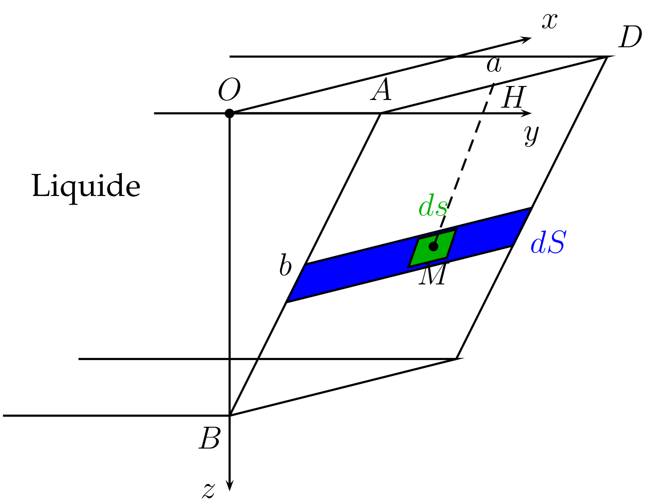
Sur la surface S entière plane, $\vec{n} = \vec{Cte}$ et

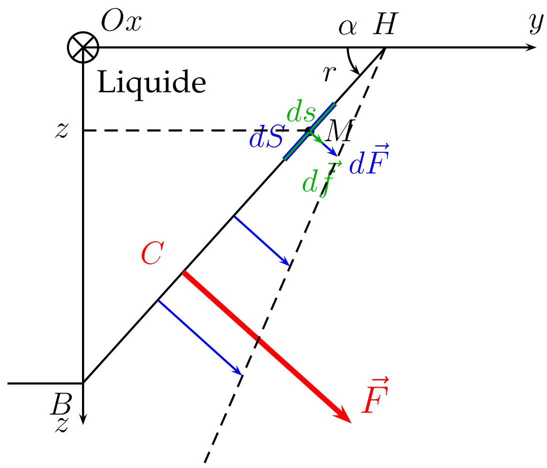
$$\vec{F} = \iint_S d\vec{f} = \iint_S \rho g z dS \vec{n} = \rho g \vec{n} \iint_S z dS$$

Caractéristiques de $\vec{F}$ résultante des forces pressantes exercées par un liquide sur une paroi plane :

- direction : perpendiculaire à la surface de la paroi ;
- sens : celui de $\vec{n}$ c'est-à-dire vers l'extérieur du liquide ;
- point d'application : C le centre de poussée tel que $\vec{F}$ appliquée en C produise les mêmes effets que toutes les forces élémentaires $d\vec{F}$ sur la paroi.
  En pratique, on utilise l'égalité du moment des forces par rapport à un point (O par exemple) : le moment de la résultante des forces $\vec{F}$ appliquée en C ($\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$) doit être équivalent à la résultante des moments exercés par les $d\vec{f}$ en chaque point M de la surface ($\iint_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}$).
  En général le centre de poussée C n'est pas confondu avec le centre d'inertie G de la paroi.

Exemple : on considère une plaque inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.





On note : $AD = a$ la largeur de la paroi (selon Ox) et $AB = b$. Sa surface est donc $S = ab$.

Soit un point M de la paroi tel que $HM = r$, c'est à dire $z = r \sin \alpha$

La surface élémentaire autour de M est $ds = dx.dr$ sur laquelle s'exerce

$$d\vec{f} = \rho g z ds \vec{n} = \rho g r \sin \alpha dx.dr \vec{n}$$

Par sommation, sur une bande de surface $dS = a.dr$, on obtient $d\vec{F} = \rho g r \sin \alpha a \, dr \, \vec{n}$
Et enfin, sur le barrage,

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{f} = \int d\vec{F} = \rho g \sin \alpha a \vec{n} \int_{r=0}^{b} r dr = \frac{1}{2} \rho g a b^2 \sin \alpha \vec{n} = \frac{1}{2} \rho g S b \sin \alpha \vec{n}$$

AJOUT

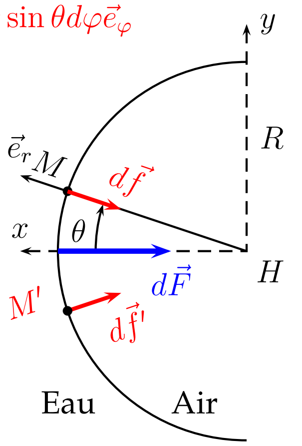
2. Élément de surface dans les différents système de coordonnées

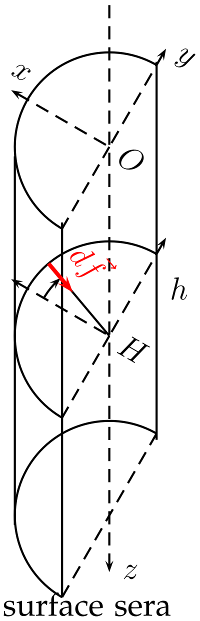
Comme toujours, le choix du système de coordonnés se fait en fonction de la symétrie du problème :

- le problème a un axe privilégié : coordonnées cylindro-polaire
- le problème a un centre privilégié (et est à 3D) : coordonnées sphériques
- le problème se passe dans un plan sans axe privilégié : coordonnées cartésiennes
- ...

Il faut savoir exprimer les éléments de surfaces dans ces différents système de coordonnées, pour cela, il suffit de se rappeler du déplacement élémentaire (et de faire des schémas, réviser M_1).

- Coordonnées cartésiennes : $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
  Si x est constant, alors l'élément de surface est $dS = dy \times dz$
- Coordonnées cylindro-polaire : $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
  Si r est constant $dS = rd\theta\, dz$
  Si z est constant $dS = dr \times rd\theta$
- Coordonnées sphériques : $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$
  Si r est constant $dS = rd\theta \times r\sin\theta d\varphi$
  Si θ est constant $dS = dr \times r\sin\theta d\varphi$





3. Notions de symétrie et composante utile

Dans certains cas, compte tenu des symétries, certaines composantes de la force élémentaire vont donner une somme nulle.
Exemple : force exercée par l'eau sur un barrage en forme de demi cylindre vertical de rayon R et de hauteur h.
Compte tenu des symétries on choisit les coordonnées cylindriques et l'élément de surface sera $Rd\theta\, dz$ La résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage est donc :

$$\vec{F} = \iint p\, dS\,(-\vec{e}_r) = \int_{z=0}^{h} \left(\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -p(z)R\vec{e}_r(\theta)\, d\theta \right) dz$$

Si on s'occupe de l'intégrale selon θ (on se place à une altitude fixée) alors

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -p(z)R\vec{e}_r(\theta)\, d\theta = -p(z)R\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{e}_r(\theta)\, d\theta = -p(z)R\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)\, d\theta$$

$$= -p(z)R \times \left([\sin\theta]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\, \vec{e}_x + [-\cos\theta]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\, \vec{e}_y \right) = -p(z)R \times 2\vec{e}_x$$

Et on se rend compte que l'intégrale selon y a donné un résultat nul. En étudiant les symétries, on aurait pu s'en rendre compte : pour chaque point $M(\theta,z)$, il y a aussi un point $M'(-\theta,z)$ symétrique. Pour ces deux points, leur forces élémentaires $d\vec{f}$ s'ajoutent selon $\vec{e}_x$ et se compensent selon $\vec{e}_y$.
On dit que df_x est la composante utile de $d\vec{f}$.

Avant d'intégrer, on fera donc l'étude des symétries pour trouver la composante utile et on ne somme qu'elle.
Ainsi, pour notre barrage, on aurait dû dire dès le début : la composante utile est selon x donc

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vec{f} = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} df_x\vec{e}_x = -p(z)R\mathrm{d}z \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\vec{e}_x = -2p(z)R\mathrm{d}z\vec{e}_x$$

Il reste ensuite à faire l'intégrale selon z, et pour avoir la résultante des forces de pression sur le barrage, il faudrait aussi prendre en compte la force exercée par l'air qui est loin d'être négligeable. (cf TD)

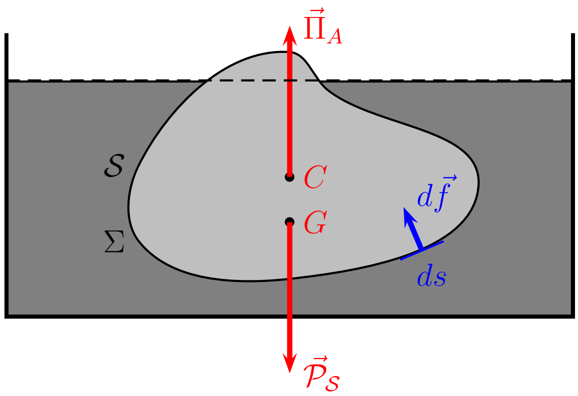
4. Poussée d'Archimède

4.a. Définition

La poussée d'Archimède est la résultante $\vec{\Pi}_A$ des forces de pression appliquées par le fluide en équilibre sur la paroi Σ du solide $\mathcal{S}$.

$$\vec{\Pi}_A = \iint_\Sigma \vec{df} = \iint_\Sigma -p\vec{ds}$$

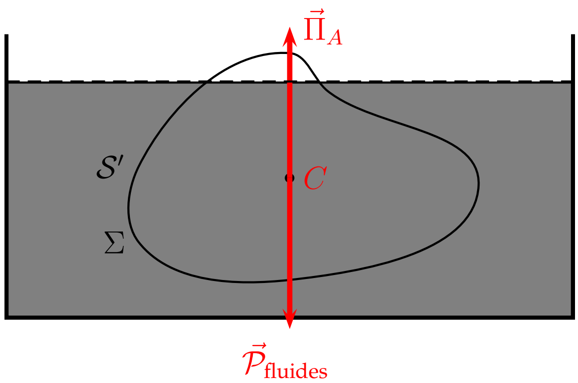
Elle est souvent difficile à calculer : détermination de chaque composante après projection des $\vec{df}$.
On utilisera de préférence le théorème d'Archimède.



4.b. Démonstration et énoncé

On remplace le système $\mathcal{S}$ par les proportions d'air et de liquide délimitées par la même surface Σ : système $\mathcal{S}'$ composé des fluides (air et liquide) déplacés par $\mathcal{S}$:
À l'équilibre, $\mathcal{S}'$ est soumis à son poids $\vec{\mathcal{P}}_{\text{fluide}}$ appliqué en C , le centre d'inertie de $\mathcal{S}'$ (C, centre de poussé $\neq G$ à priori) et aux mêmes forces pressantes que $\mathcal{S}$ (ne dépend que de Σ), on a donc
$\vec{\mathcal{P}}_{\text{fluide}} + \vec{\Pi}_A = \vec{0}$ d'où $\vec{\Pi}_A = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{fluide}}$.

Remarque : $\vec{\mathcal{P}}_{\text{air}}$ négligeable devant $\vec{\mathcal{P}}_{\text{liquide}}$.



Théorème d'Archimède : à condition que le système des fluides déplacés (remplacés par le corps immergé) soit à l'équilibre, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ est égale à l'opposée du poids des fluides déplacés. Elle s'applique en un point C, appelé centre de poussée, qui se confond avec le centre d'inertie des fluides déplacés.

$$\vec{\Pi}_A = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{fluide}} \qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{\Pi}_A) = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\Pi}_A = -\overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathcal{P}}_{\text{fluide}}$$

en général, $C \neq G$ avec G le centre d'inertie du solide, on a une position d'équilibre stable quand G situé en ou en dessous de C.

4.c. Cas particulier usuel

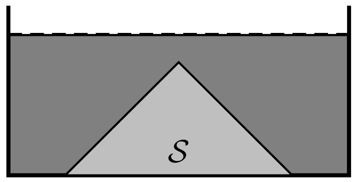
Si le solide est complètement immergé dans un seul fluide, alors

$$\vec{\Pi}_A = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{fluide}} = -\rho V \vec{g}$$

où ρ est la masse volumique du fluide et V le volume du solide.
Si en plus le solide est homogène (masse volumique uniforme), alors $C = G$.

4.d. Restriction

Le théorème d'Archimède ne s'applique pas si une partie du corps immergé n'est pas en contact avec le fluide.
Il faut alors effectuer le calcul de la force de poussée.



VI Équivalent volumique des forces de pression

1. Force volumique

Si l'on considère un petit volume dV avec une masse volumique ρ, le poids est $dm\,\vec{g} = \rho\,dV\,\vec{g}$, on peut donc définir une force volumique $\vec{f_v}$ telle que la force élémentaire $d\vec{F}$ exercée sur un volume dV s'exprime :

$$d\vec{F} = dV\,\vec{f_v}$$

Dans le cas du poids, on a donc une force volumique $\vec{f_v} = \rho\vec{g}$.

Les forces de pression sont des forces surfaciques, toutefois, on peut définir une force équivalente volumique qui a la même résultante.
Soit un volume $dV = dx\,dy\,dz$ situé entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$, alors la résultante des forces de pression appliquée au volume est :

$$d\vec{F} = \left| \begin{array}{l} p(x,y,z)dy\,dz - p(x+dx,y,z)dy\,dz \\ p(x,y,z)dx\,dz - p(x,y+dy,z)dx\,dz \\ p(x,y,z)dx\,dy - p(x,y,z+dz)dx\,dy \\ \scriptstyle(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z) \end{array} \right. = dx\,dy\,dz \left| \begin{array}{l} \dfrac{p(x,y,z) - p(x+dx,y,z)}{dx} \\ \dfrac{p(x,y,z) - p(x,y+dy,z)}{dy} \\ \dfrac{p(x,y,z) - p(x,y,z+dz)}{dz} \\ \scriptstyle(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z) \end{array} \right.$$

Soit en faisant tendre dx, dy et dz vers 0 :

$$d\vec{F} = dV \left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} \\ \scriptstyle(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z) \end{array} \right. = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p\,dV \quad \Rightarrow \quad \vec{f_v}(p) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

Les forces de pression ont donc la même résultante qu'une force volumique dont l'expression est $-\overrightarrow{\text{grad}}\,p$

2. Équation locale de la statique des fluides

Cet équivalent nous permet de ré-écrire la condition d'équilibre pour la statique des fluides. Si l'on considère un élément dV d'un fluide au repos, alors la somme des forces est nulle : $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + \cdots = \vec{0}$ donc en divisant par le volume, la somme des forces volumique est nulle.

Dans le cas où l'élément de fluide n'est soumis qu'au poids et aux forces de pressions :

♡

$$\rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \rho\vec{g}$$

Ceci est cohérent avec ce que l'on a déjà vu : $dp = \rho\vec{g} \cdot d\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}\, p \cdot d\vec{r}$ par définition du gradient

Dans le cas où d'autres forces volumiques sont présentes, il suffit de les rajouter dans le bilan des forces et de ré-écrire la condition d'équilibre.

Table des matières

Manip : verre qui colle
ludion (différence de compressibilité eau air)